B Zbiory i nie tylko

W wielu rozdziałach tej książki stykamy się z elementami matematyki dyskretnej. W tym dodatku dokładniej przedstawimy konwencje notacyjne, definicje i podstawowe własności zbiorów, relacji, funkcji, grafów i drzew. Czytelnicy dobrze zaznajomieni z tym materiałem mogą ten dodatek tylko przejrzeć.

B.1 Zbiory

Zbiór jest kolekcją rozróżnialnych obiektów, zwanych ***elementami*** zbioru. Jeżeli obiekt x jest elementem zbioru S, to piszemy $x \in S$ (czytaj: „x jest elementem zbioru S" lub krócej „x należy do S"). Jeśli x nie jest elementem S, to piszemy $x \notin S$. Możemy zdefiniować zbiór przez wypisanie jego elementów w nawiasach klamrowych. Możemy na przykład zapisać zbiór S zawierający elementy 1, 2 i 3 w postaci $S = \{1, 2, 3\}$. Ponieważ 2 jest elementem zbioru S, a 4 nie, możemy zapisać $2 \in S$ i $4 \notin S$. Elementy zbioru nie są uporządkowane i zbiór nie może zawierać dwóch takich samych elementów[1]. Zbiory A i B są ***równe***, czyli $A = B$, jeżeli zawierają te same elementy. Na przykład $\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.

Dla często spotykanych zbiorów używamy szczególnych oznaczeń:

- $\emptyset$ oznacza ***zbiór pusty***, tzn. zbiór niezawierający żadnego elementu.
- $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór ***liczb całkowitych***, tzn. zbiór $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{R}$ oznacza zbiór ***liczb rzeczywistych***.
- $\mathbb{N}$ oznacza zbiór ***liczb naturalnych***, tzn. zbiór $\{0, 1, 2, \ldots\}$[2].

Jeśli wszystkie elementy zbioru A należą do zbioru B, tzn. jeżeli $x \in A$ implikuje $x \in B$, to piszemy $A \subseteq B$ i mówimy, że A jest ***podzbiorem*** zbioru B. Zbiór A jest ***podzbiorem właściwym***

[1] Wariant zbioru, który może zawierać ten sam obiekt w wielu egzemplarzach, nosi nazwę ***multizbioru*** lub inaczej ***zbioru z powtórzeniami***.

[2] Według niektórych autorów liczby naturalne zaczynają się od 1. Jednak obecnie przyjęło się, że 0 jest również liczbą naturalną.

zbioru B, co zapisujemy $A \subset B$, gdy $A \subseteq B$, ale $A \neq B$. (Niektórzy autorzy używają symbolu „$\subset$" do oznaczenia zwykłego zawierania zamiast zawierania właściwego). Każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem: dla każdego A zachodzi $A \subseteq A$. Dla zbiorów A i B zachodzi $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Relacja bycia podzbiorem jest przechodnia (patrz str. 1088): dla dowolnych zbiorów A, B i C: jeżeli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru: dla dowolnego zbioru A zachodzi $\emptyset \subseteq A$.

Niekiedy definiuje się zbiory za pomocą innych zbiorów. Mając dany zbiór A, możemy zdefiniować zbiór $B \subseteq A$ przez podanie własności wyróżniającej elementy B z A. Możemy na przykład określić zbiór liczb parzystych jako $\{x\colon\ x \in \mathbb{Z}$ i $x/2$ jest liczbą całkowitą$\}$. Dwukropek w tym zapisie oznacza „takie, że". (Niektórzy autorzy zamiast dwukropka używają pionowej kreski).

Mając dane zbiory A i B, możemy definiować nowe zbiory za pomocą ***operacji na zbiorach***:

- ***Przecięciem*** (częścią wspólną) zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cap B = \{x\colon\ x \in A \text{ i } x \in B\}.$$

- ***Sumą*** zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{x\colon\ x \in A \text{ lub } x \in B\}.$$

- ***Różnicą*** zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A - B = \{x\colon\ x \in A \text{ i } x \notin B\}.$$

Operacje na zbiorach podlegają podanym poniżej prawom.

Prawa zbioru pustego:

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset, \\ A \cup \emptyset &= A. \end{aligned}$$

Prawa idempotentności:

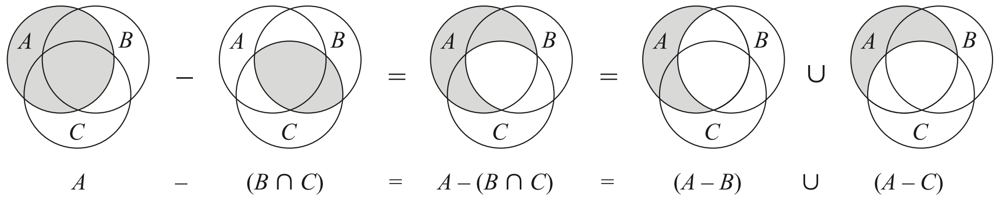
$$\begin{aligned} A \cap A &= A, \\ A \cup A &= A. \end{aligned}$$

Prawa przemienności:

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, \\ A \cup B &= B \cup A. \end{aligned}$$

Prawa łączności:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$



Rysunek B.1 Diagram Venna ilustrujący pierwsze prawo De Morgana (B.2). Każdy ze zbiorów A, B i C jest reprezentowany przez jedno koło

Prawa rozdzielności:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Prawa pochłaniania:

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A, \\ A \cup (A \cap B) &= A. \end{aligned}$$

Prawa De Morgana:

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C), \\ A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Pierwsze z praw De Morgana jest zilustrowane na rys. B.1 przy użyciu ***diagramu Venna***, gdzie zbiory są przedstawione w postaci obszarów na płaszczyźnie.

Często wszystkie z rozważanych zbiorów są podzbiorami jakiegoś większego zbioru U, zwanego ***uniwersum***. Gdy rozważamy na przykład różne zbiory składające się z liczb całkowitych, wtedy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ stanowi uniwersum. Mając dane uniwersum U, definiujemy ***dopełnienie*** zbioru A jako $\overline{A} = U - A = \{x : x \in U \text{ i } x \notin A\}$. Dla dowolnego zbioru $A \subseteq U$ zachodzą następujące prawa:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= A, \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset, \\ A \cup \overline{A} &= U. \end{aligned}$$

Prawa De Morgana (B.2) można sformułować przy użyciu dopełnień zbiorów. Dla każdych dwóch zbiorów $B, C \subseteq U$ zachodzi

$$\begin{aligned} \overline{B \cap C} &= \overline{B} \cup \overline{C}, \\ \overline{B \cup C} &= \overline{B} \cap \overline{C}. \end{aligned}$$

Zbiory A i B są ***rozłączne***, jeżeli nie mają wspólnych elementów, tzn. jeżeli $A \cap B = \emptyset$. ***Rodzina*** zbiorów $S_1, S_2, \ldots$, skończona lub nieskończona, to zbiór zbiorów, którego elementami są zbiory S_i. Rodzina $\mathcal{S} = \{S_i\}$ niepustych zbiorów tworzy ***podział*** zbioru S, jeżeli

- zbiory są ***parami rozłączne***, co oznacza, że jeśli $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ i $i \neq j$, to $S_i \cap S_j = \emptyset$, oraz
- ich sumą jest S:

$$S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i .$$

Innymi słowy, $\mathcal{S}$ tworzy podział S, jeżeli każdy element S występuje w dokładnie jednym zbiorze $S_i \in \mathcal{S}$.

Liczba elementów w zbiorze S oznaczana jako $|S|$ jest nazywana ***mocą*** (lub ***rozmiarem***) zbioru. Dwa zbiory mają tę samą moc, jeśli istnieje między nimi odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne. Moc zbioru pustego wynosi $|\emptyset| = 0$. Jeśli moc zbioru jest liczbą naturalną, to mówimy, że zbiór jest ***skończony***; w przeciwnym wypadku jest on ***nieskończony***. Zbiór nieskończony, który można odwzorować wzajemnie jednoznacznie w zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$, jest ***przeliczalny***; w przeciwnym razie zbiór jest ***nieprzeliczalny***. Na przykład, zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest przeliczalny, ale zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.

Dla dowolnych dwóch skończonych zbiorów A i B zachodzi wzór

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| , \tag{B.3}$$

skąd wynika, że

$$|A \cup B| \leq |A| + |B| .$$

Jeśli A i B są rozłączne, to $|A \cap B| = 0$, więc $|A \cup B| = |A| + |B|$. Jeśli $A \subseteq B$, to $|A| \leq |B|$.

Skończony zbiór o n elementach nazywa się czasami ***n-zbiorem***; 1-zbiór jest nazywany ***singletonem***. Podzbiór k-elementowy nazywamy ***k-podzbiorem***.

Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru S, łącznie ze zbiorem pustym i całym zbiorem S, oznacza się przez 2^S i nazywa ***zbiorem potęgowym*** S. Na przykład $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Zbiór potęgowy skończonego zbioru S ma moc $2^{|S|}$ (patrz zad. B.1-5).

Czasami zajmujemy się podobnymi do zbiorów strukturami, w których elementy są uporządkowane. ***Parę uporządkowaną*** złożoną z dwóch elementów a i b oznacza się przez (a, b) i definiuje formalnie jako zbiór $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$. Para uporządkowana (a, b) *nie* jest więc tym samym co para uporządkowana (b, a).

Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów A i B, oznaczany $A \times B$, jest zbiorem wszystkich takich par uporządkowanych, że pierwszy element pary jest elementem zbioru A, a drugi – elementem zbioru B. Bardziej formalnie,

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \text{ i } b \in B\} .$$

Na przykład $\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$. Jeśli A i B są zbiorami skończonymi, to moc ich iloczynu kartezjańskiego wynosi

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| . \tag{B.4}$$

Iloczyn kartezjański n zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest zbiorem ***n-tek***

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \colon a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\} .$$

Jeżeli wszystkie zbiory są skończone, to moc iloczynu kartezjańskiego wynosi

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n| \,.$$

Iloczyn kartezjański pojedynczego zbioru A przez samego siebie n razy oznaczamy przez

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A \,.$$

Jeśli zbiór A jest skończony, to moc tego iloczynu kartezjańskiego wynosi $|A^n| = |A|^n$. Każdą n-tkę można również traktować jako skończony ciąg długości n (patrz str. 1092).

Przedziały to spójne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Oznaczamy je za pomocą nawiasów okrągłych lub kwadratowych. Dla danych liczb rzeczywistych a i b ***przedział domknięty*** $[a, b]$ to zbiór $\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ liczb rzeczywistych leżących między a i b, włącznie z a i b. (Jeśli $a > b$, to z tej definicji wynika, że $[a, b] = \emptyset$). ***Przedział otwarty*** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ nie zawiera żadnego z końcowych punktów. Są dwa ***przedziały półotwarte*** $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ i $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$, z których każdy nie zawiera jednego z punktów końcowych.

Można również zdefiniować przedziały liczb całkowitych, zastępując w powyższych definicjach $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{Z}$. To, czy przedział jest określony dla liczb rzeczywistych, czy całkowitych, należy zazwyczaj wywnioskować z kontekstu.

Zadania

B.1-1

Narysuj diagramy Venna ilustrujące pierwsze z praw rozdzielności (B.1).

B.1-2

Udowodnij uogólnienie praw De Morgana na dowolną skończoną rodzinę zbiorów:

$$\begin{aligned}
\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n} \,, \\
\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \,.
\end{aligned}$$

★ ***B.1-3***

Udowodnij tak zwaną ***zasadę włączania i wyłączania***, która jest uogólnieniem równości (B.3):

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\
&\quad = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
&\qquad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots \qquad \text{(wszystkie pary)} \\
&\qquad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots \qquad \text{(wszystkie trójki)} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \,.
\end{aligned}$$

B.1-4

Pokaż, że zbiór liczb nieparzystych jest przeliczalny.

B.1-5
Pokaż, że dla dowolnego skończonego zbioru S zbiór potęgowy 2^S ma $2^{|S|}$ elementów (tzn. istnieje $2^{|S|}$ różnych podzbiorów S).

B.1-6
Podaj indukcyjną definicję n-tki, korzystając z teoriomnogościowej definicji pary uporządkowanej.

B.2 Relacje

Relacja dwuargumentowa (binarna) R określona w dwóch zbiorach A i B jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Jeżeli $(a, b) \in R$, to czasami piszemy: $a \, R \, b$. Kiedy mówimy, że R jest relacją dwuargumentową w zbiorze A, oznacza to, że R jest podzbiorem $A \times A$. Na przykład relacją „mniejsze niż” w zbiorze liczb naturalnych jest zbiór $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ i } a < b\}$. Relacja n-argumentowa (n-arna) w zbiorach $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest podzbiorem $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Relacja dwuargumentowa $R \subseteq A \times A$ jest ***zwrotna***, jeśli

$a \, R \, a$

dla każdego $a \in A$. Na przykład „=” i „$\leq$” są relacjami zwrotnymi w zbiorze $\mathbb{N}$, podczas gdy „<” nie jest. Relacja R jest ***symetryczna***, jeżeli

$a \, R \, b$ implikuje $b \, R \, a$

dla dowolnych $a, b \in A$. Na przykład relacja „=” jest symetryczna w $\mathbb{N}$, lecz „<” i „$\leq$” już nie są. Relacja R jest ***przechodnia***, jeżeli

$a \, R \, b$ i $b \, R \, c$ implikuje $a \, R \, c$

dla dowolnych $a, b, c \in A$. Na przykład relacje „<”, „$\leq$” i „=” są przechodnie, ale relacja $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ i } a = b - 1\}$ nie jest, ponieważ z $3 \, R \, 4$ i $4 \, R \, 5$ nie wynika, że $3 \, R \, 5$.

Relacja, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywa się ***relacją równoważności***. Na przykład „=” jest relacją równoważności w zbiorze liczb naturalnych, ale „<” nią nie jest. Jeśli R jest relacją równoważności w zbiorze A, to dla dowolnego $a \in A$ ***klasa abstrakcji***, zwana także klasą równoważności, elementu a jest zbiorem $[a] = \{b \in A : a \, R \, b\}$ wszystkich elementów równoważnych a. Jeśli na przykład zdefiniujemy $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}$ i $a + b$ jest liczbą parzystą$\}$, to R jest relacją równoważności, ponieważ $a + a$ jest parzyste (zwrotność), z parzystości $a + b$ wynika parzystość $b + a$ (symetria) oraz jeśli $a + b$ i $b + c$ są parzyste, to $a + c$ jest parzyste (przechodniość). Klasą abstrakcji liczby 4 jest $[4] = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, a klasą abstrakcji 3 jest $[3] = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Oto podstawowe twierdzenie dotyczące klas abstrakcji:

Twierdzenie B.1 (Relacja równoważności jest podziałem)
Klasy abstrakcji relacji równoważności R w zbiorze A stanowią podział A, a każdy podział A określa relację równoważności w A, dla której zbiory podziału są klasami abstrakcji.

Dowód W pierwszej części dowodu musimy pokazać, że klasy abstrakcji relacji R są niepustymi, parami rozłącznymi zbiorami, których sumą jest A. Ponieważ R jest zwrotna, $a \in [a]$, więc klasy abstrakcji są niepuste; co więcej, ponieważ każdy element $a \in A$ należy do klasy abstrakcji $[a]$, sumą klas abstrakcji jest A. Pozostaje wykazać, że klasy abstrakcji są parami rozłączne, tzn. jeśli dwie klasy abstrakcji $[a]$ i $[b]$ mają wspólny element c, to są w istocie tym samym zbiorem. Tak więc jeśli $a\,R\,c$ i $b\,R\,c$, to z symetrii wynika, $c\,R\,b$, a następnie z przechodniości wynika $a\,R\,b$. Dla dowolnego elementu $x \in [a]$ mamy $x\,R\,a$, a więc i $x\,R\,b$, z czego wynika, że $[a] \subseteq [b]$. Podobnie, $[b] \subseteq [a]$, a więc $[a] = [b]$.

Co do drugiej części dowodu, niech $\mathcal{A} = \{A_i\}$ będzie podziałem A i zdefiniujmy $R = \{(a, b)\colon$ istnieje i takie, że $a \in A_i$ i $b \in A_i\}$. Pokażemy, że R jest relacją równoważności w A. Zwrotność zachodzi, ponieważ z tego, że $a \in A_i$, wynika $a\,R\,a$. Symetria zachodzi, ponieważ jeśli $a\,R\,b$, to a i b znajdują się w tym samym zbiorze A_i, więc $b\,R\,a$. Jeżeli $a\,R\,b$ i $b\,R\,c$, to wszystkie trzy elementy należą do tego samego zbioru, więc zachodzi $a\,R\,c$, skąd wynika przechodniość. Aby przekonać się, że zbiory podziału są klasami abstrakcji R, zauważmy, że jeśli $a \in A_i$, to z tego, że $x \in [a]$, wynika, że $x \in A_i$, a z tego, że $x \in A_i$, wynika, że $x \in [a]$. ■

Relacja dwuargumentowa R w zbiorze A jest ***antysymetryczna***, jeżeli

$$a\,R\,b \text{ i } b\,R\,a \text{ implikuje } a = b.$$

Na przykład relacja „$\leq$” w zbiorze liczb naturalnych jest antysymetryczna, bo jeśli $a \leq b$ i $b \leq a$, to $a = b$. Relacja, która jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, jest nazywana ***porządkiem częściowym***, a zbiór, na którym jest ona zdefiniowana, nazywamy ***zbiorem częściowo uporządkowanym***. Na przykład relacja „jest potomkiem” jest relacją porządku częściowego w zbiorze wszystkich ludzi (jeśli traktujemy każdego jako własnego potomka).

W częściowo uporządkowanym zbiorze A może nie być pojedynczego „największego” elementu a takiego, że $b\,R\,a$ dla wszystkich $b \in A$. Zamiast tego może istnieć wiele elementów ***maksymalnych*** a, takich że dla żadnego $b \neq a$ w zbiorze A nie zachodzi $a\,R\,b$. Na przykład wśród pewnej liczby pudełek różnych rozmiarów może być kilka „największych” pudełek, których nie da się umieścić w żadnym innym pudełku, ale nie ma żadnego pojedynczego „największego” pudełka, do którego można zmieścić każde inne pudełko[3].

Relacja R na zbiorze A jest ***relacją pełną***, jeśli dla każdych dwóch elementów $a, b \in A$ mamy $a\,R\,b$ lub $b\,R\,a$ (mogą być spełnione oba warunki), tzn. każde dwa elementy zbioru A można zestawić ze sobą za pomocą relacji R. Porządek częściowy, który jest relacją pełną, nazywamy ***pełnym*** lub ***liniowym***. Na przykład relacja „$\leq$” jest porządkiem liniowym na zbiorze liczb naturalnych, ale relacja „jest potomkiem” nie jest porządkiem liniowym na zbiorze wszystkich ludzi, ponieważ istnieją osoby, z których żadna nie jest przodkiem innej. Relacja pełna, która jest przechodnia, ale niekoniecznie zwrotna i antysymetryczna, jest nazywana ***pełnym przedporządkiem***.

---

[3] Ściśle rzecz biorąc, żeby relacja „mieszczenia się wewnątrz” była porządkiem częściowym, trzeba przyjąć, że pudełko mieści się w samym sobie.

Zadania

B.2-1
Udowodnij, że relacja bycia podzbiorem „$\subseteq$" określona w rodzinie wszystkich podzbiorów $\mathbb{Z}$ jest porządkiem częściowym, ale nie liniowym.

B.2-2
Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n relacja „przystaje modulo n" jest relacją równoważności w zbiorze liczb całkowitych. (Mówimy, że $a \equiv b \pmod{n}$, jeśli istnieje liczba całkowita q taka, że $a - b = qn$). Na jakie klasy abstrakcji ta relacja dzieli zbiór liczb całkowitych?

B.2-3
Podaj przykłady relacji, które są

(a) zwrotne i symetryczne, ale nie przechodnie;

(b) zwrotne i przechodnie, ale nie symetryczne;

(c) symetryczne i przechodnie, ale nie zwrotne.

B.2-4
Niech S będzie zbiorem skończonym, a R – relacją równoważności na S. Pokaż, że jeśli dodatkowo R jest antysymetryczna, to klasy abstrakcji S względem relacji R są singletonami.

B.2-5
Profesor Narcissus twierdzi, że jeżeli relacja R jest symetryczna i przechodnia, to jest również zwrotna. Podaje następujący dowód. Z symetrii wynika, że jeśli $a\,R\,b$, to $b\,R\,a$. Z przechodniości wynika zatem $a\,R\,a$. Czy profesor ma rację?

B.3 Funkcje

Dla danych dwóch zbiorów A i B ***funkcją*** f nazywamy relację dwuargumentową w $A \times B$ o tej własności, że dla każdego $a \in A$ istnieje dokładnie jedno $b \in B$ takie, że $(a, b) \in f$. Zbiór A nazywa się ***dziedziną*** funkcji f, a zbiór B – ***przeciwdziedziną*** funkcji f. Czasami zapisujemy $f : A \to B$; jeśli $(a, b) \in f$, to piszemy $b = f(a)$, ponieważ b jest jednoznacznie określone przez wybór a.

Intuicyjnie, funkcja f przyporządkowuje każdemu elementowi z A element z B. Żaden z elementów ze zbioru A nie może mieć przypisanych dwóch różnych elementów z B, ale element z B może być przypisany dwóm różnym elementom zbioru A. Na przykład relacja dwuargumentowa

$$f = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ i } b = a \bmod 2\}$$

jest funkcją $f: \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, ponieważ każdej liczbie naturalnej a jest przypisana dokładnie jedna wartość b z $\{0, 1\}$, taka że $b = a \bmod 2$. Na przykład $0 = f(0)$, $1 = f(1)$, $0 = f(2)$ itd. Natomiast relacja dwuargumentowa

$$g = \{(a, b): a, b \in \mathbb{N} \text{ i } a + b \text{ jest parzyste}\}$$

nie jest funkcją, ponieważ $(1, 3)$ i $(1, 5)$ należą do g, więc jeśli wybierzemy $a = 1$, to nie ma dokładnie jednego b takiego, że $(a, b) \in g$.

Dla danej funkcji $f: A \to B$, jeśli $b = f(a)$, to mówimy, że a jest ***argumentem*** f, a b jest ***wartością*** f w a. Możemy określić funkcję przez podanie jej wartości dla każdego elementu z jej dziedziny. Na przykład możemy zdefiniować $f(n) = 2n$ dla $n \in \mathbb{N}$, co oznacza $f = \{(n, 2n): n \in \mathbb{N}\}$. Dwie funkcje f i g są sobie ***równe***, jeśli mają tę samą dziedzinę i przeciwdziedzinę i jeśli dla każdego a z dziedziny $f(a) = g(a)$.

Ciąg skończony o długości n to funkcja f, której dziedzina jest zbiorem $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Często określamy taki ciąg przez wypisanie jego wartości w nawiasach kątowych: $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1) \rangle$. ***Ciąg nieskończony*** to funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Na przykład ciąg Fibonacciego, zdefiniowany wzorem (3.22), jest ciągiem nieskończonym $\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \rangle$.

Kiedy dziedziną funkcji f jest iloczyn kartezjański, często pomija się dodatkowe nawiasy otaczające argument funkcji f. Jeżeli na przykład $f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to B$, to napiszemy $b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zamiast $b = f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$. Każde a_i nazywamy wtedy ***argumentem*** funkcji f, pomimo że technicznie rzecz biorąc (pojedynczy) argument f jest n-tką $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Jeśli $f: A \to B$ jest funkcją i $b = f(a)$, to mówimy, że b jest ***obrazem*** a przy funkcji f. Obraz zbioru $A' \subseteq A$ przy f jest zdefiniowany jako

$$f(A') = \{b \in B: b = f(a) \text{ dla pewnego } a \in A'\}.$$

Zakres (zbiór wartości) funkcji f to obraz jej dziedziny, czyli $f(A)$. Na przykład zakresem funkcji $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określonej jako $f(n) = 2n$ jest $f(\mathbb{N}) = \{m: m = 2n \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}$, inaczej mówiąc, zakresem jest zbiór parzystych liczb naturalnych.

Funkcja jest ***surjekcją***, jeśli jej zbiór wartości jest jej całą przeciwdziedziną. Na przykład funkcja $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ jest surjekcją z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, ponieważ każdy element ze zbioru $\mathbb{N}$ pojawia się jako wartość f dla pewnego argumentu. Natomiast funkcja $f(n) = 2n$ nie jest surjekcją z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, ponieważ dla żadnego argumentu wartością f nie jest jakakolwiek liczba nieparzysta. Funkcja $f(n) = 2n$ jest jednakże surjekcją ze zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb parzystych. Surjekcję $f: A \to B$ nazywamy czasami odwzorowaniem zbioru A ***na*** zbiór B. Jeśli mówimy, że funkcja f jest „na", oznacza to, że jest surjekcją.

Funkcja $f: A \to B$ jest ***injekcją***, jeśli dla różnych argumentów f przyjmuje różne wartości, tzn. jeśli $a \neq a'$ implikuje $f(a) \neq f(a')$. Na przykład funkcja $f(n) = 2n$ jest injekcją ze zbioru $\mathbb{N}$ w zbiór $\mathbb{N}$, ponieważ każda liczba parzysta b jest obrazem przy f co najwyżej jednego elementu dziedziny, a mianowicie $b/2$. Funkcja $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ nie jest injekcją, ponieważ wartość 1 można uzyskać dla dwóch argumentów: $f(2) = 1$ i $f(3) = 1$. Injekcja jest czasami nazywana funkcją ***różnowartościową*** (ang. *one-to-one function*).

Funkcja $f : A \to B$ jest ***bijekcją***, jeśli jest jednocześnie surjekcją i injekcją. Na przykład funkcja $f(n) = (-1)^n \lceil n/2 \rceil$ jest bijekcją z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcr} 0 & \to & 0, \\ 1 & \to & -1, \\ 2 & \to & 1, \\ 3 & \to & -2, \\ 4 & \to & 2, \\ & \vdots & \end{array}$$

Powyższa funkcja jest injekcją, ponieważ żaden element ze zbioru $\mathbb{Z}$ nie jest obrazem więcej niż jednego elementu ze zbioru $\mathbb{N}$; jest surjekcją, ponieważ każdy element zbioru $\mathbb{Z}$ pojawia się jako obraz jakiegoś elementu zbioru $\mathbb{N}$. Ta funkcja jest zatem bijekcją. Bijekcja jest czasem nazywana ***odpowiedniością wzajemnie jednoznaczną***, ponieważ łączy parami elementy dziedziny i przeciwdziedziny. Bijekcja ze zbioru A na siebie jest niekiedy nazywana ***permutacją***.

Kiedy funkcja f jest bijekcją, jej ***odwrotność*** f^{-1} jest zdefiniowana jako

$$f^{-1}(b) = a \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f(a) = b.$$

Na przykład odwrotnością funkcji $f(n) = (-1)^n \lceil n/2 \rceil$ jest

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & \text{jeżeli } m \geq 0, \\ -2m - 1, & \text{jeżeli } m < 0. \end{cases}$$

Zadania

B.3-1
Niech A i B będą zbiorami skończonymi i niech $f : A \to B$ będzie funkcją. Wykaż, że

(a) jeśli f jest injekcją, to $|A| \leq |B|$;

(b) jeśli f jest surjekcją, to $|A| \geq |B|$.

B.3-2
Czy funkcja $f(x) = x + 1$ jest bijekcją, kiedy dziedziną i przeciwdziedziną jest $\mathbb{N}$? Czy jest bijekcją, kiedy dziedziną i przeciwdziedziną jest $\mathbb{Z}$?

B.3-3
Podaj naturalną definicję relacji odwrotnej do danej relacji dwuargumentowej taką, że jeśli ta relacja jest bijekcją, to relacja odwrotna jest jej funkcją odwrotną.

★ ***B.3-4***
Podaj bijekcję ze zbioru $\mathbb{Z}$ na zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.